

УДК 534.1

DOI [10.37153/2618-9283-2022-1-27-36](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2022-1-27-36)

Теоретические и экспериментальные исследования

Построение специальной матрицы демпфирования для метода прямого пошагового интегрирования

Турилов В.В.¹, Уткин И.А.¹

¹АО «Атомэнергопроект», г. Нижний Новгород, Российская Федерация

Аннотация: Рассматривается методика построения специальной матрицы демпфирования для метода прямого пошагового интегрирования уравнений движения деформируемого твердого тела, эквивалентной матрице демпфирования, формируемой в неклассическом методе модальной суперпозиции.

Ключевые слова: задачи взаимодействия зданий и сооружений с грунтовым основанием, метод прямого пошагового интегрирования уравнений движения, построение специальной матрицы демпфирования

Для цитирования: Турилов В.В., Уткин И.А. Построение специальной матрицы демпфирования для метода прямого пошагового интегрирования // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2022. № 1. С. 27-36.

DOI [10.37153/2618-9283-2022-1-27-36](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2022-1-27-36)

Theoretical and experimental studies

Construction of a special damping matrix for the direct step-by-step integration method

V.V. Turilov¹, I.A. Utkin¹

¹JSC Atomenergoproekt, Nizhny Novgorod, Russian Federation

Abstract: The technique of constructing of a special damping matrix for the method of direct step-by-step integration of the equations of motion of a deformable solid, equivalent to the damping matrix formed in the non-classical modal superposition method, is considered.

Keywords: problems of interaction of buildings and structures with the ground base, the method of direct step-by-step integration of equations of motion, the construction of a special damping matrix

For citation: Turilov V.V., Utkin I.A. Construction of a special damping matrix for the direct step-by-step integration method. Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii = *Earthquake engineering. Constructions safety*. 2022, no. 1, pp. 27-36. (In Russian)

DOI [10.37153/2618-9283-2022-1-27-36](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2022-1-27-36)

@ Турилов В.В., Уткин И.А., 2022

Введение

В статье [1] был представлен *неклассический метод модальной суперпозиции* (НММС), хорошо зарекомендовавший себя при решении задач взаимодействия зданий и сооружений АЭС с грунтовым основанием. Существо данного метода заключается в том, что в пространстве обобщенных (модальных) координат система уравнений движения деформируемого твердого тела не распадается на совокупность независимых уравнений, в отличие от *классического метода модальной суперпозиции*, а решается как связанная система с применением методов пошагового интегрирования, аналогичных используемым при прямом интегрировании уравнений движения.

Отметим, что в соответствии с нормативным документом [2] (пункт 3.5.4) применение классического метода модальной суперпозиции для задач взаимодействия зданий и сооружений с грунтовым основанием не вполне корректно по причине обычного превышения композитным модальным демпфированием величины 20 % от критического для форм, в основном связанных с колебаниями объекта на “грунтовых” пружинах. Это превышение обусловлено учетом “волнового” (“радиационного”) демпфирования в грунтовом основании, моделируемого с помощью вязкого демпфирования и вносящего определяющий вклад в демпфирование по указанным формам колебаний системы сооружение - грунтовое основание. Наличие такого превышения является косвенным свидетельством того, что в матрице модального демпфирования, сформированной корректным образом с учетом “грунтовых” демпферов, имеются достаточно большие недиагональные члены, которые не позволяют рассматривать данную матрицу как диагональную.

Преимуществом НММС перед *методом прямого пошагового интегрирования* (МППИ) уравнений движения является то, что при его использовании обеспечивается корректный учет конструкционного демпфирования в элементах строительных конструкций (а также материального демпфирования в грунтовом основании), в отличие от МППИ с матрицей демпфирования Рэлея. Напомним, что матрица демпфирования Рэлея обеспечивает заданные значения затуханий только для двух заранее фиксированных частот, а в интервале между ними имеется “провисание” кривой демпфирования, что обуславливает избыточную консервативность ответов системы по собственным формам из указанного частотного интервала. Следует отметить, что “грунтовые” демпферы, а также возможно имеющиеся в составе сооружения (например, в системе виброизоляции) вязкие демпферы, в обоих методах учитываются корректно.

В монографии [3] была указана возможность построения матрицы демпфирования для МППИ, обеспечивающей заданные затухания по формам колебаний системы. В работе [4] данная методика была воспроизведена для случая диагональной матрицы исходного модального демпфирования и применена для решения задачи о взаимодействии промышленного здания с грунтовым основанием при падении на здание самолета.

В настоящей работе аналогичная методика обобщается на случай недиагональной матрицы модального демпфирования с целью построения *специальной матрицы демпфирования* для МППИ, обеспечивающей демпфирование в системе, эквивалентное демпфированию, формируемому в неклассическом методе модальной суперпозиции, реализованном в программном комплексе Simcenter Nastran [5].

С целью верификации разработанная методика реализована средствами языка программирования DMAP Nastran. На реальной задаче показано практическое совпадение результатов при применении НММС и МППИ *со специальной матрицей демпфирования*.

Результаты данной работы докладывались на XIV Российской национальной конференции по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию [6].

Формирование модальной матрицы демпфирования

Система уравнений движения деформируемого твердого тела, дискретизированная по методу конечных элементов (МКЭ), имеет следующий вид:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}(t)\}. \quad (1)$$

Здесь $[\mathbf{M}]_{n \times n}$ – матрица масс, $[\mathbf{C}]_{n \times n}$ – матрица демпфирования, $[\mathbf{K}]_{n \times n}$ – матрица жесткости, $\{\ddot{\mathbf{u}}\}_n$ – вектор ускорений, $\{\dot{\mathbf{u}}\}_n$ – вектор скоростей, $\{\mathbf{u}\}_n$ – вектор перемещений, $\{\mathbf{F}(t)\}_n$ – вектор внешних сил; нижние индексы означают размерности матриц и векторов (векторы рассматриваются как столбцы), при этом n – число степеней свободы соответствующей конечно-элементной модели (КЭ-модели).

Отметим, что при решении задач о сейсмических воздействиях на какие-либо объекты, внешние силы заменяются на переносные силы инерции. При этом в уравнении (1) будут фигурировать перемещения точек объекта относительно места приложения акселерограммы, задающей сейсмическое воздействие.

Матрица демпфирования может быть определена через матрицу жесткости и коэффициент конструкционного демпфирования \mathbf{G} следующим образом:

$$[\mathbf{C}] = \mathbf{G}[\mathbf{K}]/\omega^*. \quad (2)$$

Здесь ω^* является *круговой частотой приведения*. В качестве круговой частоты приведения, как правило, используется первая круговая частота собственных колебаний системы. Такой подход обладает недостатком, состоящим в том, что для системы со многими степенями свободы только на частоте приведения будет выполняться равенство конструкционного и вязкого демпфирования (напомним, что вязкое демпфирование прямо пропорционально частоте, а конструкционное демпфирование не зависит от частоты). Кроме того, здесь коэффициент конструкционного демпфирования \mathbf{G} одинаков для всей системы.

В программном комплексе Simcenter Nastran реализован подход, который в сочетании с неклассической формой метода модальной суперпозиции устраняет указанные недостатки. Существо подхода заключается в следующем.

Создается составная матрица конструкционного демпфирования всей системы $[\mathbf{G}]$, при формировании которой матрица жесткости каждой из подсистем умножается на соответствующий коэффициент конструкционного демпфирования (в этой же матрице может быть учтено материальное демпфирование в грунтовом основании).

Затем эта матрица переводится из физического пространства в пространство обобщенных координат с помощью умножения слева на усеченную транспонированную матрицу собственных векторов системы $[\Phi]_{m \times n}^T$ (в которой собственные векторы $\{\varphi_i\}$ являются строками), а справа – на усеченную исходную матрицу собственных векторов $[\Phi]_{n \times m}$ (в которой собственные векторы $\{\varphi_i\}$ являются столбцами). Здесь через m обозначено число собственных форм КЭ-модели, удерживаемых в решении. Обычно в методе модальной суперпозиции усечение числа учитываемых форм производится по некоторому критерию, например, в решении удерживаются все формы, дающие сумму модальных масс не менее 90 % от общей массы системы по каждому из направлений,

либо учитываются все формы с частотами, не превосходящими частоту ускорения нулевого периода в спектре исходного сейсмического воздействия.

Далее полученная матрица умножается слева и справа на диагональную матрицу следующего вида:

$$[\tilde{}]_{m \times m} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\omega_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sqrt{\omega_m} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_m$ – круговые частоты недемпфированной системы (с учетом жесткости основания, если таковое имеется).

В результате матрица конструкционного демпфирования $[G]$, преобразуется в пространстве обобщенных координат в матрицу модального демпфирования $[B]$:

$$[B]_{m \times m} = [\tilde{}]_{m \times m} ([\Phi]_{m \times n}^T [G]_{n \times n} [\Phi]_{n \times m}) [\tilde{}]_{m \times m}. \quad (4)$$

Указанный прием позволяет для каждой формы колебаний в качестве частоты приведения использовать свою собственную частоту, что обеспечивает корректный учет конструкционного демпфирования для всех собственных форм.

Если во всех моделируемых подсистемах конструкционное демпфирование имеет одно и то же значение, и материальное демпфирование в основании (если взаимодействие с основанием учитывается в расчете) равно тому же значению, то матрица $[B]$ будет диагональной. В противном случае в матрице $[B]$ будут присутствовать недиагональные члены.

В пространстве обобщенных координат формируется также матрица $[B_d]$, соответствующая “грунтовым” демпферам, заданным с помощью матрицы демпфирования $[C_d]$:

$$[B_d]_{m \times m} = [\Phi]_{m \times n}^T [C_d]_{n \times n} [\Phi]_{n \times m}. \quad (5)$$

Если в системе сооружение - грунтовое основание имеются какие-либо демпферы (например, система виброизоляции, включающая в себя демпферы), то вязкое демпфирование в них также может быть учтено в матрице $[C_d]$.

Результирующая матрица модального демпфирования $[B^*]$ будет иметь следующий вид:

$$[B^*]_{m \times m} = [B]_{m \times m} + [B_d]_{m \times m}. \quad (6)$$

Следует отметить, что демпферам в физическом пространстве соответствуют члены на главной диагонали матрицы $[C_d]$. При переходе же в пространство обобщенных координат в матрице $[B_d]$ появляются недиагональные члены, сопоставимые по величине с диагональными членами данной матрицы. Указанный факт означает, что матрицу $[B_d]$ в случае наличия демпферов (“грунтовых”, либо каких-то других) нельзя “диагонализовать” (то есть, просто отбросить недиагональные члены). Из этого, в свою очередь, следует, что система формируемых уравнений в обобщенных координатах не распадается на совокупность независимых уравнений, а должна рассматриваться как связанная.

В ПК Simcenter Nastran к решению системы уравнений в обобщенных координатах применяется метод пошагового интегрирования, аналогичный МППИ, применяемому в физическом пространстве.

Построение специальной матрицы демпфирования для метода прямого пошагового интегрирования

Для построения матрицы демпфирования системы сооружение - грунтовое основание, эквивалентной матрице модального демпфирования (4) в НММС (с целью ее использования в МППИ), предлагается следующая методика.

При переходе из физического пространства в пространство обобщенных координат к матрице вязкого демпфирования $[C]$ применяется преобразование

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [B]. \quad (7)$$

Обратный переход из пространства обобщенных координат в физическое пространство можно осуществить с помощью преобразования

$$([\Phi]^T)^{-1}[\Phi]^T[C][\Phi][\Phi]^{-1} = ([\Phi]^T)^{-1}[B][\Phi]^{-1}, \quad (8)$$

откуда получаем

$$[C] = ([\Phi]^T)^{-1}[B][\Phi]^{-1}. \quad (9)$$

Для собственных форм, нормированных по массе, имеет место следующее свойство:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [E]. \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$([\Phi]^T)^{-1} = [M][\Phi]. \quad (11)$$

Операции обращения и транспонирования перестановочны, поэтому

$$([\Phi]^{-1})^T = [M][\Phi] \text{ и } [\Phi]^{-1} = ([M][\Phi])^T. \quad (12)$$

Тогда будем иметь следующее выражение для матрицы демпфирования $[C]$:

$$[C] = [M][\Phi][B]([M][\Phi])^T. \quad (13)$$

С учетом усечения числа собственных форм выражение (13) запишется в виде:

$$[C]_{n \times n} = [M]_{n \times n}[\Phi]_{n \times m}[B]_{m \times m}([M]_{n \times n}[\Phi]_{n \times m})^T_{m \times n}. \quad (14)$$

Таким образом, подставив в выражение (14) вместо матрицы $[B]$ матрицу, сформированную по формуле (4), и добавив к полученной матрице матрицу, соответствующую вязким демпферам (если таковые имеются системе), будем иметь матрицу демпфирования для МППИ, эквивалентную используемой в НММС.

Легко показать, что сформированная матрица демпфирования является симметричной.

Следует отметить, что матрица $[B]$ в выражении (14) может быть сформирована и другими способами. Например, для каждой из учитываемых собственных форм можно задать некоторое значение модального демпфирования. В этом случае матрица $[B]$ будет диагональной. Диагональной матрица $[B]$ будет и в случае использования комбинированного модального демпфирования [2], учитывающего различные значения затуханий в различных элементах конструкций (например, в железобетонных и стальных). Обратите внимание, что в последнем случае не следует сводить вязкие затухания в демпфе-

рах (“грунтовых”, или каких-либо иных) к относительным затуханиям с целью учета их при расчете композитного модального демпфирования. Это обусловлено тем, что, во-первых, вязкое демпфирование корректно обрабатывается в МПШИ, а во-вторых, такой прием порождает эквивалентную диагональную матрицу демпфирования в обобщенных координатах, не учитывающую достаточно большие (относительно диагональных членов) недиагональные члены, которые неизбежно возникли бы при корректном преобразовании затуханий в демпферах в пространство обобщенных координат.

Апробация разработанной методики

Методика построения и использования специальной матрицы демпфирования в динамическом расчете была реализована в программном комплексе Simcenter Nastran с помощью встроенного языка программирования DMAP.

В качестве примера рассмотрим расчет здания турбины АЭС в части определения инерционных нагрузок на опорно-упорный подшипник турбоагрегата при сейсмическом воздействии уровня проектного землетрясения. Данный подшипник воспринимает всю горизонтальную осевую нагрузку от ротора турбины, в связи с чем этот узел является критически важным для всей системы. Максимально допустимая осевая нагрузка на опорно-упорный подшипник для рассмотренной турбины не должна превышать 250 тс.

На рисунке 1 представлен общий вид КЭ-модели здания турбины.

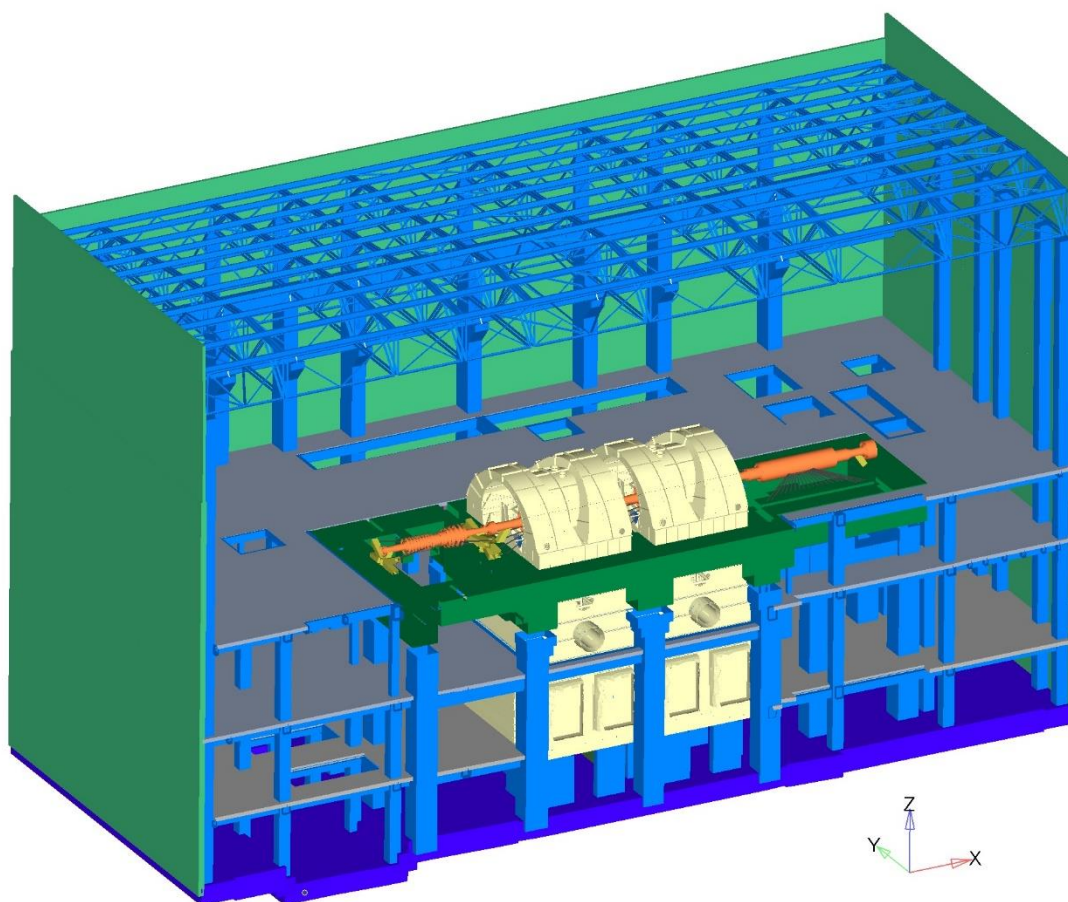


Рисунок 1 – Общий вид КЭ-модели здания турбины (в разрезе)

Figure 1 – General view of the CE model of the turbine building (in section)

На рисунке 2 представлен общий вид виброизолированной верхней фундаментной плиты с размещенной на ней моделью турбоагрегата.

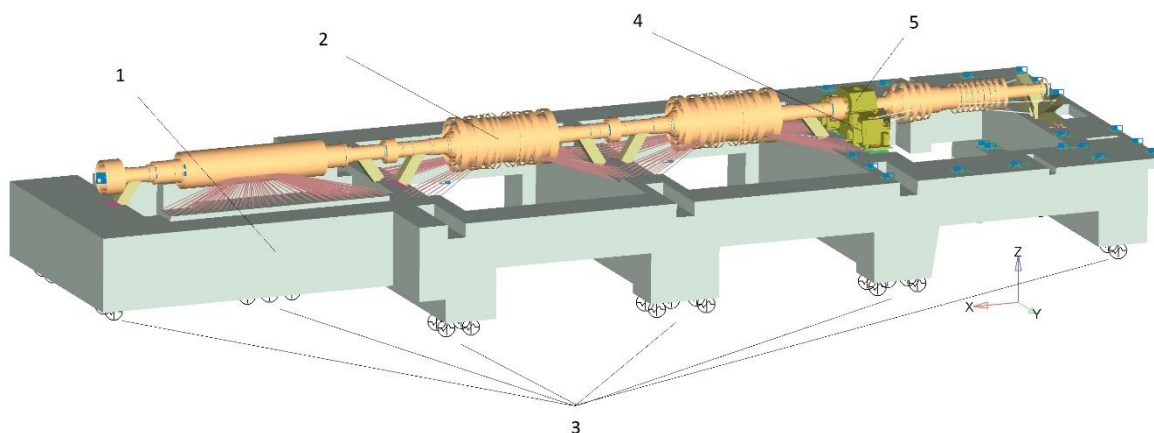


Рисунок 2 – Верхняя фундаментная плита турбоагрегата с оборудованием (1 – плита, 2 – ротор, 3 – система пружин и вязких демпферов, 4 – пьедестал, 5 – место установки опорно-упорного подшипника)

Figure 2 – Upper foundation plate of the turbine unit with equipment (1 – plate, 2 – rotor, 3 – system of springs and viscous dampers, 4 – pedestal, 5 – installation location of the thrust bearing)

Задача решалась в два этапа.

На первом этапе рассматривалась задача взаимодействия здания турбины с грунтовым основанием при сейсмическом воздействии, заданном исходной трехкомпонентной акселерограммой, и определялись ответные акселерограммы на опорах виброизоляторов, поддерживающих верхнюю плиту фундамента турбоагрегата (на нижних концах пружин и демпферов рисунка 2).

На втором этапе рассматривалась задача о колебаниях виброизолированной плиты фундамента турбоагрегата с расположенным на ней оборудованием, возбуждаемых с помощью акселерограмм, определенных на первом этапе, и рассчитывалась инерционная нагрузка на опорно-упорный подшипник.

Так как в системе виброизоляторы - верхняя плита - турбоагрегат присутствуют вязкие демпферы, то значения модального демпфирования на некоторых собственных формах системы доходят и даже превосходят 20 %. В таблице 1 приведены значения десяти первых диагональных членов матрицы модального демпфирования. При этом следует отметить, что недиагональные члены данной матрицы сопоставимы по значениям с ее диагональными членами.

Таблица 1 – Значения модального демпфирования для первых 10 форм

Table 1 – Modal damping values for the first 10 forms

Номер формы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота, Гц	1,45	1,48	1,61	3,19	3,27	3,78	4,44	5,38	5,41	6,05
Модальное демпфирование	0,19	0,19	0,23	0,06	0,07	0,08	0,12	0,06	0,12	0,08

Задача второго из указанных выше этапов была решена с помощью четырех динамических методов: МППИ с использованием матрицы затухания по Рэлею, МППИ с использованием специально построенной матрицы демпфирования, НММС и классического ММС.

Отметим, что в обоих случаях применения МППИ вязкие демпферы учитываются одинаково, а различие в моделировании затухания относится к части системы без демпферов. Для классического ММС затухания по формам соответствуют диагональным членам в матрице демпфирования, сформированной для НММС.

На рисунке 3 приведен общий вид кривой относительных затуханий по Рэлею.

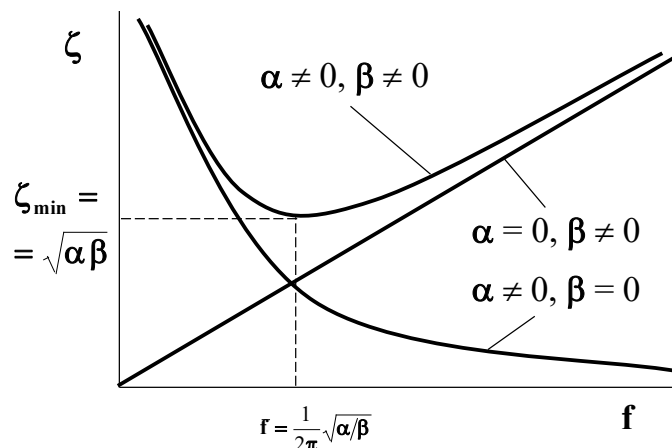


Рисунок 3 – Относительные затухания по Рэлею

Figure 3 – Relative Rayleigh damping

Коэффициенты α и β матрицы затухания Рэлея для рассматриваемой задачи определялись из условия равенства относительного затухания значению 0,02 на нижней частоте рассматриваемой системы, равной 1,45 Гц, и значению 0,06 на частоте 50 Гц. Указанные значения относительных затуханий соответствуют значениям модальных демпфирований за вычетом вкладов от вязких демпферов.

В таблице 2 представлены результаты определения осевой нагрузки на опорно-упорный подшипник, полученные с помощью различных методов решения.

Таблица 2 – Результаты расчетов

Table 2 – Calculation results

Метод решения	Нагрузка на подшипник, тс
МППИ с затуханием по Рэлею	328
МППИ со специальной матрицей демпфирования	248
НММС	247
ММС	185

Из данной таблицы следует, что осевая нагрузка на опорно-упорный подшипник, рассчитанная с помощью МППИ с применением затухания по Рэлею, существенно превосходит соответствующее критическое значение, равное 250 тс. Однако, при ис-

пользованном подходе в решении имеется и существенный консерватизм, обусловленный “провисанием” кривой затуханий Рэлея на промежуточных частотах интервала, заданного при определении коэффициентов Рэлея. Снятие излишнего консерватизма в решении может привести к требуемому результату.

Применение МППИ в сочетании со специальной матрицей демпфирования, методика построения которой описана выше, дает корректный результат для осевой нагрузки на упорно-упорный подшипник, не превосходящий критического значения (что позволяет обосновать требуемую сейсмостойкость турбоагрегата). Данный результат практически совпадает с результатом применения НММС, на основе которого построена специальная матрица демпфирования для МППИ.

Следует еще отметить, что применение классического ММС дает в данном случае чрезмерно заниженный результат (а в целом просто неверный результат из-за отсутствия учета недиагональных членов матрицы демпфирования). В общем случае это может привести к недостоверному заключению о сейсмостойкости оборудования.

Выводы

Разработана и апробирована методика построения специальной матрицы демпфирования для применения в методе прямого пошагового интегрирования уравнений движения при решении проблем динамики зданий и сооружений.

Методика устраняет основной недостаток традиционного использования демпфирования по Рэлею, связанный с излишним консерватизмом решения из-за “провисания” соответствующей кривой относительных затуханий.

Разработанная методика позволяет получать корректные решения, удовлетворяющие нормативным требованиям по учету демпфирования в рассматриваемых системах.

Список литературы

1. Турилов В.В., Уткин И.А. Применение метода модальной суперпозиции в неклассической форме для решения задач взаимодействия зданий и сооружений АЭС с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 2. С. 30-35.
2. ASCE STANDARD. ASCE 4-16 Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures / American Society of Civil Engineers, 2017.
3. Бирбраер А.Н., Шульман С.Г. Прочность и надежность конструкций АЭС при особых динамических воздействиях. М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. Коротков В.А., Иванов А.П., Наумкин А.В. Учет модального демпфирования вместо демпфирования по Рэлею в расчетах поэтажных спектров ответа в строительных конструкциях АЭС при падении самолета // SIMULIA Community Conference, 2014.
5. Simcenter Nastran Advanced Dynamic Analysis User's Guide / Siemens Digital Industries Software, 2020.
6. Турилов В.В., Уткин И.А. Построение специальной матрицы демпфирования для метода прямого пошагового интегрирования. XIV Российская национальная конференция по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию (с международным участием): материалы научно-практической конференции. Сочи, 11-15 октября 2021 г. С. 133-134. DOI 10.37153/2687-0045-2021-14-133-134.

References

1. Turilov V.V., Utkin I.A. Primenenie metoda modal'noj superpozicii v neklassicheskoy forme dlya resheniya zadach vzaimodejstviya zdaniy i sooruzhenij AEHS s gruntovym osnovaniem pri sejsmicheskikh vozdeystviyakh. Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij. 2017, no. 2, pp. 30-35. (In Russian)
2. ASCE STANDARD. ASCE 4-16 Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures / American Society of Civil Engineers, 2017.
3. Birbraer A.N., Shul'man S.G. Prochnost' i nadezhnost' konstrukcij AEHS pri osobykh dinamicheskikh vozdeystviyakh. M.: Ehnegoatomizdat, 1989. (In Russian)
4. Korotkov V.A., Ivanov A.P., Naumkin A.V. Uchet modal'nogo dempfirovaniya vmesto dempfirovaniya po Releyu v raschetakh poehtaznykh spektrov otveta v stroitel'nykh konstrukciyakh AEHS pri padenii samoleta // SIMULIA Community Conference, 2014. (In Russian)
5. Simcenter Nastran Advanced Dynamic Analysis User's Guide / Siemens Digital Industries Software, 2020.
6. Turilov V.V., Utkin I.A. Postroenie special'noj matricy dempfirovaniya dlya metoda pryamogo poshagovogo integrirovaniya. XIV Rossijskaya nacional'naya konferenciya po sejsmostojkomu stroitel'stvu i sejsmicheskomu rajonirovaniyu (s mezhdunarodnym uchastiem): materialy nauchno-prakticheskoy konferencii. Sochi, 11-15 oktyabrya 2021 g. S. 133-134. DOI 10.37153/2687-0045-2021-14-133-134. (In Russian)

Данные об авторах / Information about authors

Турилов В.В. к.т.н., с.н.с., нач. лаб. АО «Атомэнергопроект». Нижний Новгород, Российская Федерация

V.V. Turilov, PhD, senior researcher, head of the laboratory of JSC Atomenergoproekt. Nizhny Novgorod, Russian Federation

Уткин И.А., глав. спец. АО «Атомэнергопроект». Нижний Новгород, Российская Федерация

I.A. Utkin, JSC Atomenergoproekt chief specialist. Nizhny Novgorod, Russian Federation